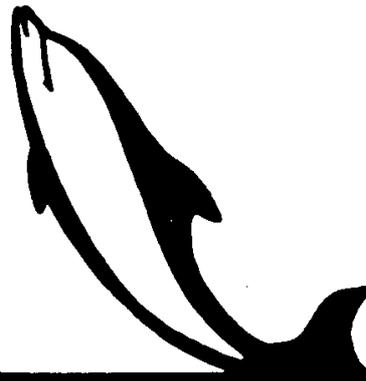


**ЗАДАЧИ
ГИДРОДИНАМИКИ
СО СВОБОДНЫМИ
ГРАНИЦАМИ**



(Динамика сплошной среды 89)

LONG-WAVE THERMOCAPILLARY CONVECTION IN A LIQUID LAYER UNDER A CAP.

L.G. Badratinova

A lubrication equation has been obtained that describes evolution of thickness for a liquid layer in a two-layer liquid-gas system located between parallel heater plates at different temperatures. Heat transfer in a gas layer is taken into account. The paper studies a linear stability of equilibrium states, stationary solutions of the equation for periodic flows, motions with an immovable interface such as “convex”, “concave” or “bore”. It is shown that the equation has now solutions in the form of stationary traveling waves. We consider an analogy between the derived two-side model of convection in a liquid layer and existing one-side model in which the “Biot heat exchange” condition is used.

О ДЛИННОВОЛНОВОЙ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ
В СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПОД КРЫШЕЙ

Л. Г. Бадрадинова

I. Исходные уравнения. Между твердыми пластинами $Z = -1$, $Z = 1_1$ ($1, 1_1 > 0$) находится вязкая жидкость, заполняющая область $-1 < Z < f(X, Y, \tau)$. Область $f(X, Y, \tau) < Z < 1_1$ занята теплопроводящим газом. Система находится в слабом силовом поле. Между пластинами поддерживается постоянный перепад температур. Движение жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса и теплопроводности. Динамика газовой фазы не учитывается. На границе раздела ставятся кинематическое и динамические условия для скорости, условия непрерывности температур и тепловых потоков.

Описание конвекции, вызываемой совместным действием термокапиллярных, капиллярных и гравитационных сил, в длинноволновом приближении сводится к решению следующей задачи:

$$h_t = \operatorname{div} \left[\frac{1}{2} h^2 \nabla \theta_\Gamma + \frac{1}{3} h^3 (\nabla h - \alpha \Delta h) \right], \quad (1.1)$$

$$\nabla \theta_\Gamma = \operatorname{sgn} (T_{10} - T_0) u_* \nabla h / (1 - h + u_* h)^2, \quad (1.2)$$

$$h = h^0(x, y), \quad t = 0 \quad (1.3)$$

$$\theta = \kappa_* \operatorname{sgn}(T_{10} - T_0) z / (1 - h + \kappa_* h) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(T_{10} - T_0), \quad (1.4)$$

$$\theta_1 = \operatorname{sgn}(T_{10} - T_0) (z - 1) / (1 - h + \kappa_* h) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(T_{10} - T_0)$$

$$u = (z^2/2 - zh) \nabla(\gamma h - \alpha \Delta h) - z \nabla \theta_\Gamma, \quad (1.5)$$

$$w = \left(\frac{z^2 h}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \Delta(\gamma h - \alpha \Delta h) + \frac{z^2}{2} \nabla h [\nabla(\gamma h - \alpha \Delta h) + \Delta \theta_\Gamma],$$

$$p = \gamma(h - z) - \alpha \Delta h.$$

Система (I.I)-(I.5) получается в первом приближении при асимптотическом разложении искомого решения в ряд по степеням малого параметра $\epsilon = d / L$, где $d = l_1 + l_2$ - расстояние между пластинами, L - характерный продольный размер. При выводе предполагается, что при $\epsilon \rightarrow 0$ величины

$$\epsilon^2 \operatorname{Re}, \quad \epsilon^2 \operatorname{Re} \operatorname{Pr}, \quad \epsilon^2 \operatorname{Re} \operatorname{Pr} \chi_*^{-1} \quad (1.6)$$

стремятся к нулю, а

$$\alpha = \epsilon^2 \sigma_0 / \sigma_T |T_{10} - T_0|, \quad \gamma = \pm \epsilon^2 \rho g L^2 / \sigma_T |T_{10} - T_0| \quad (1.7)$$

остаются постоянными. В формулах (I.I)-(I.7) $x = X/L$, $y = Y/L$, $z = (Z + 1)/d$ и $t = \bar{U} \tau / L$ - безразмерные координаты и время. Безразмерные функции

$$h = (f+1)/d, \quad u = U / \bar{U}, \quad v = V / \bar{U}, \quad w = W / \epsilon \bar{U},$$

$$p = (P - P_1) d^2 / \rho \nu \bar{U} L, \theta = (\Theta - \min(T_{10}, T_0)) / |T_{10} - T_0|$$

$$\theta_1 = (\Theta_1 - \min(T_{10}, T_0)) / |T_{10} - T_0|$$

соответственно толщина слоя, компоненты скорости, давление и температура в жидкости и температура в газе; ∇ , Δ - двумерные операторы по переменным x, y ; θ_Γ - температура на границе раздела. Величины T_{10} , T_0 - заданные температуры на верхней и нижней пластине: $\kappa_* = \kappa_1 / \kappa$ ($\chi_* = \chi_1 / \chi$) - соотношение коэффициентов теплопроводности (температуропроводности) газа и жидкости; σ_0 - значение коэффициента поверхностного натяжения на границе раздела при равновесном состоянии слоя; $\sigma_T = - \partial \sigma / \partial \theta > 0$ - температурный коэффициент поверхностного натяжения. Величины $\rho, g > 0$ - плотность жидкости, ускорение силы тяжести. Знаки плюс и минус в (I.6) соответствуют случаям направленности силы тяжести против и, соответственно, вдоль оси z . Через \bar{U} обозначена характерная скорость термокапиллярного движения, $\bar{U} = \varepsilon |T_{10} - T_0| \sigma_T / \rho \nu$. Параметры $Re = \bar{U} L / \nu$, $Pr = \nu / \chi$ - соответственно числа Рейнольдса и Прандтля.

В рассматриваемой модели конвекции давление, скорость, температуры сред непосредственно выражаются через толщину слоя по формулам (I.3). Поэтому при $t = 0$ задается лишь начальная толщина $h^0(x, y)$. Указанное обстоятельство объясняется тем, что в качестве масштаба времени выбрана величина L / \bar{U} - "большое время". На временах порядка L / \bar{U} начальное распределение скорости и температуры не влияет на картину течения. Приближение тонкого слоя для "малых" времен порядка d^2 / ν в однослойной постановке рассматривалось в [1]. В работе [2] показано, что в двухслойной постановке, учитывающей динамику верхней среды, задача о нахождении толщины h не отделяется. Описание конвекции для системы "жидкость-

жидкость" сведено там к системе двух связанных уравнений относительно толщины h и давления P_1 в верхней среде. В пределе, когда в этой системе отношения коэффициентов динамических вязкостей жидкостей μ_1 / μ и плотностей жидкостей ρ_1 / ρ стремятся к нулю, а давление $P_1 \equiv \text{const}$, задача отыскания функций h отделяется и сводится к (I.I)–(I.3).

2. Устойчивость равновесия плоского слоя. Пусть слой со свободной границей $h = h_0 = 1 / (1_1 + 1)$ испытывает нормальные возмущения, периодичные по координатам x, y с волновым числом $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ и амплитудой δ . Подставляя в линеаризованные в окрестности $h = h_0$ уравнения (I.I), (I.2) выражение

$$h = h_0 + \delta \cdot \exp(\lambda_n t + i \omega_x x + i \omega_y y),$$

получим для инкремента λ_n уравнение

$$3 \lambda_n / \alpha h_0^3 = -\omega^2 (A + B) - \omega^4 \quad (2.1)$$

где

$$A = 3 \kappa_* \operatorname{sgn}(T_{10} - T_0) / 2 \alpha h_0 (1 - h_0 + \kappa_* h_0)^2,$$

$$B = \gamma / \alpha. \quad (2.2)$$

Эволюция длинноволновых возмущений определяется знаком суммы $A + B$. Термокапиллярные силы играют стабилизирующую роль при подогреве со стороны газа и дестабилизирующую – при подогреве со стороны подложки. Сила тяжести стабилизирует возмущения при $\gamma > 0$ (слой на подложке) и дестабилизирует при $\gamma < 0$ (слой "на потолке"). Исследуя знак выражения $A+B$ приходим к следующим выводам об устойчивости равновесия плоского слоя.

I). Слой на подложке, подогрев со стороны газа ($\gamma > 0$, $T_{10} > T_0$). Равновесие слоя абсолютно устойчиво при всех $h_0 \in (0, 1)$.

2). Слой на подложке, подогрев снизу ($\gamma > 0, T_{10} < T_0$).
 Считаем $\kappa_* < 2/3$, что справедливо для реальных систем "жидкость-газ". При малой тяжести, когда $\gamma \leq 27 \kappa_* (1 - \kappa_*) / 4$ слой неустойчив при всех $h_0 \in (0, 1)$, т.е. преобладающую роль играют дестабилизирующие термокапиллярные силы. Если $3/2 \kappa_* > \gamma > 27 \kappa_* (1 - \kappa_*) / 4$, то для средних толщин $h \in (h_{0*}, h_{0**})$ сила тяжести стабилизирует длинноволновые возмущения и слой устойчив. При $h < h_{0*}$ и при $h > h_{0**}$ стабилизирующее действие тяжести мало по сравнению с дестабилизирующим влиянием термокапиллярных сил, и слой неустойчив. Здесь и ниже h_{0*} , h_{0**} - корни уравнения

$$h_0 (1 - h_0 + \kappa_* h_0)^2 = 3 \kappa_* / 2 |\gamma| \quad (2.3)$$

При $h = h_{0*}$ и при $h = h_{0**}$ имеем $A + B = 0$, в силу (2.1) $\lambda_n = -\alpha h_0^3 \omega^4 / 3$, т.е. слой устойчив, состояние равновесия стабилизируется капиллярными силами. Если $\gamma \geq 3/2 \kappa_*$, то уравнение (2.3) имеет только один корень h_{0*} . В этом случае при $h \geq h_{0*}$ слой устойчив, а при $h < h_{0*}$ дестабилизирующее влияние термокапиллярных сил преобладает, и слой неустойчив.

3). Слой "на потолке", подогрев со стороны газа ($\gamma < 0, T_{10} > T_0$). Считаем $\kappa_* < 2/3$. При маленькой отрицательной перегрузке, когда $\gamma \geq -27 \kappa_* (1 - \kappa_*) / 4$ слой устойчив при всех $h_0 \in (0, 1)$; происходит стабилизация под действием термокапиллярных сил. Если

$$-3/2 \kappa_* < \gamma < -27 \kappa_* (1 - \kappa_*) / 4,$$

то при средних толщинах $h_0 \in (h_{0*}, h_{0**})$ преобладает дестабилизирующее влияние тяжести и слой неустойчив. При $h < h_{0*}$ и при $h > h_{0**}$ слой устойчив: происходит термокапиллярная стабилизация. Если $\gamma \leq -3/2 \kappa_*$, то

слой устойчив при $h \leq h_0^*$ и неустойчив при $h > h_0^*$

4). Слой "на потолке", подогрев "с потолка" ($\gamma < 0$, $T_{10} < T_0$). И тяжесть и термокапиллярные силы играют дестабилизирующую роль. Имеет место длинноволновая неустойчивость.

3. Об установившихся бегущих волнах. Положим в (I.1), (I.2) $h = h_0 (1 + N)$. Введем новые переменные $\xi = x - ct$, $\tau = t$, где $c = \text{const}$. Интегрируя (I.1), (I.2) при $N_{\tau} = 0$, получим следующее уравнение для описания стационарно бегущих волн

$$N''' - \left[B + \frac{A}{(1+N)(1-\lambda N)^2} \right] N' - \frac{C}{(1+N)^2} - \frac{Q}{(1+N)^3} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь

$$' = \partial / \partial \xi, \quad \lambda = (1 - \kappa_*) h_0 [1 - (1 - \kappa_*) h_0]^{-1}, \quad C = 3c / \alpha h_0^3, \quad Q -$$

- постоянная интегрирования. Покажем, что при $Q^2 + C^2 \neq 0$ уравнение (3.1) не имеет периодических решений. Для этого проинтегрируем сначала (3.1) по ξ от 0 до D , где D - период волны. Учитывая условия периодичности получим зависимость между C и Q :

$$C = - Q I_3 / I_2 \quad (3.2)$$

В (3.2) и ниже используются обозначения $I_k = \int_0^D (1+N)^{-k} d\xi$, $k = 1, 2, 3$. Умножая (3.1) на $1+N$, интегрируя по периоду, учитывая условия периодичности, находим

$$C = - Q I_2 / I_1 \quad (3.3)$$

Из (3.2), (3.3) следует равенство $Q (I_3 I_1 - I_2)^2 = 0$. Подынтег-

ральное выражение в I_2 представимо в виде произведения функций $f_1 = (1 + h)^{-1/2}$, $f_2 = (1 + h)^{-3/2}$. Используя неравенство Коши-Шварца и учитывая, что знак равенства в нем достигается только при линейно зависимых функциях f_1 , f_2 получаем $I_3 - I_1 - I_2^2 > 0$. Следовательно, $Q = C = 0$.

4. Периодические стационарные решения. При $C = Q = 0$

($\xi = x$) уравнение (3.1) описывает плоские стационарные решения задачи (1.1)–(1.3). Будем разыскивать периодические решения $\eta(x) = 1 + h(x)$. Без ограничения общности можно считать $\eta(x)$ четной функцией. Предположим, что $\eta(x)$ монотонно возрастает при $x \in (0, D/2)$. Из (3.1) после двукратного интегрирования получаем

$$\eta^2 = Y(\eta) = \Phi(\eta) + c_1 \eta + c_2. \quad (4.1)$$

Здесь c_1 , c_2 – постоянные интегрирования

$$\Phi(\eta) = B \eta^2 - M \eta \ln [\eta(1 - i\eta)^{-1}], \quad (4.2)$$

где

$$i = (1 - i_*)h_0, \quad M = -2A(1 - h_0 + i_* h_0)^2; \quad A \text{ и } B$$

определяются формулами (2.2). Константы c_1 , c_2 из условий четности и периодичности $\eta'(0) = \eta'(D/2) = 0$ выражаются через минимальный и максимальный уровни поверхности $k_1 =$

$$= \eta(0), \quad k_2 = \eta(D/2) \quad (k_1 < k_2):$$

$$c_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) / (k_2 - k_1), \quad c_2 = (k_1 \varphi_2 - k_2 \varphi_1) / (k_2 - k_1), \quad (4.3)$$

где $\varphi_i = \Phi(k_i)$, $i = 1, 2$.

Из формул (4.1), (4.3) для расчета формы поверхности получаем следующую квадратуру

$$x = \int_{k_1}^{\eta} \frac{d\tau}{\sqrt{Y(\tau)}} \quad (4.4)$$

Через Y обозначается функция

$$Y(\tau) = (k_2 - \tau)(\tau - k_1)(k_2 - k_1)^{-1} [(\varphi - \varphi_1)(\tau - k_1)^{-1} + (\varphi - \varphi_2)(k_2 - \tau)^{-1}]. \quad (4.5)$$

Форма поверхности зависит от пяти параметров M, B, k_1, k_2, κ . Через параметры k_1, k_2 длина волны выражается по формуле

$$D = 2 \int_{k_1}^{k_2} \frac{d\tau}{\sqrt{Y(\tau)}} \quad (4.6)$$

Формулы (4.4)–(4.6) определяют D – периодическое решение $\eta(x)$, если выполняются следующие условия

$$Y(\tau) > 0 \text{ при } \tau \in (k_1, k_2), Y'(k_1) \neq 0, Y'(k_2) \neq 0. \quad (4.7)$$

Последние два неравенства в (4.7) обеспечивают интегрируемость обособностей подынтегральных выражений в (4.4), (4.6). Отметим, что для параметров k_1, k_2 допустимыми значениями являются следующие:

$$0 < k_1 \leq 1, 1 \leq k_2 < h_0^{-1} = 1 + 1 \dots$$

Так как $Y(k_1) = Y(k_2) = 0$, то вопрос о существовании периодических решений можно свести к выяснению знака $Y''(\tau)$. Если при всех $\tau \in [k_1, k_2]$ производная $Y''(\tau) > 0$, то функция Y отрицательна и решения не существуют. Выполнение обратного неравенства $Y''(\tau) < 0$

при всех $\tau \in [k_1, k_2]$ обеспечивает выполнимость всех условий (4.7), т.е. является достаточным условием существования периодических решений. Исследуя знак $Y''(\tau)$ можно доказать следующее утверждение.

Пусть $M > 0$ (подогрев жидкости со стороны соприкасающейся с ней пластины). Если $B < 27M/8\mu$, то периодические решения у задачи (4.1)-(4.3) существуют при всех допустимых значениях k_1, k_2 . При $B \geq 27M/8\mu$ периодические

решения существуют для $0 < k_1 < k_2 < \min(1+l_*, k_0)$, а

если $1+l_* > k_{00}$, то для $k_{00} < k_1 < k_2 < 1+l_*$.

Через k_0, k_{00} ($k_0 \leq k_{00} < \mu^{-1}$, причем $k_0 = k_{00}$ при $B = 27M/8\mu$) обозначены корни уравнения $2k(1-\mu k)^2 = M/B$.

Пусть $M < 0$ (подогрев жидкого слоя со стороны газа).

Если $B \geq 27M/8\mu$, то задача (4.1)-(4.3) не имеет периодических решений. При $B < 27M/8\mu$ периодические решения существуют для k_1 и k_2 , удовлетворяющих неравенству

$$k_0 < k_1 < k_2 = \min(1+l_*, k_{00}).$$

С помощью замены $\tau = (k_2 + k_1)/2 + (k_2 - k_1)/2r$ перейдем в формуле (4.6) к новой переменной интегрирования r и осуществим предельный переход $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow 1$. В результате получим формулу

$$D = 2 \int_{-1}^1 \frac{dr}{\sqrt{\varphi''(1)(r^2-1)}} = 2\pi(Mq_0)^{-1/2}, \quad (4.8)$$

где

$$Mq_0 = M / 2(1-\mu)^2 - B = -A - B \quad (4.9)$$

Вводя волновое число $\omega = 2\pi / D$, из (4.8), (4.9) получаем равенство $A + B + \omega^2 = 0$, определяющее критическую зависимость между параметрами, при которой от состояния равновесия плоского слоя отщепляются D - периодические решения, описывающие стационарное конвективное ячейчатое течение. Эта критическая зависимость в точности совпадает с условием потери устойчивости плоского слоя, следующим из (2.1) при $\lambda_n = 0$.

5. Малоамплитудные решения. В этом пункте предполагается $(k_1 + k_2) / 2 = 1$, что соответствует волне со средним уровнем поверхности, равным невозмущенному уровню h_0 . Амплитуда волны $a = (k_2 - k_1) / 2$ считается малой величиной. Подстановка $k_1 = 1 - a / 2$, $k_2 = 1 + a / 2$ в (4.5) после разложения в ряд по малой амплитуде a , замены $\tau = 1 + ar / 2$ и отбрасывания членов порядка $O(a^5)$ дает приближенную формулу

$$Y(r) = \frac{Ma^2}{4} (1 - r^2) [q_0 + aq_1 r + a^2 q_2 (5 - r^2)] \quad (5.1)$$

Величина q_0 определяется по формуле (4.9)

$$q_1 = (1 - 3\kappa) / 12(1 - \kappa)^3, \quad q_2 = (6\kappa^2 - 4\kappa + 1) / 48(1 - \kappa)^4 \quad (5.2)$$

Если параметры a , M , B , κ таковы, что

$$q_+ = q_0 + aq_1 + 4a^2 q_2 = 0 \quad (5.3)$$

или

$$q_- = q_0 - aq_1 + 4a^2 q_2 = 0, \quad (5.4)$$

то периодических решений не существует. При заданных физических параметрах системы "жидкость-газ" и толщинах l , l_1 равенства (5.3), (5.4) определяют критические перепады температур $(T_0 - T_{10})$, при которых решение вырождается в единенную стационарную волну.

Предположим сначала, что $q_+ \neq 0$, $q_- \neq 0$. Периодические решения малой амплитуды находятся по формулам (4.4), (4.6), (5.1). Сведение разрешающих эллиптических интегралов к нормальной форме Лежандра громоздко и здесь не приводится. Считая $a \ll 1$, сделаем дополнительное предположение

$$Mq_0 > 0, \quad |q_1| + 5q_2 < |q_0| \quad (5.5)$$

При выполнении этих неравенств, определяемая по формуле (5.1) функция $Y(r)$ положительна. После перехода к переменной r в формулах (4.4), (4.6) оправдано разложение подынтегрального выражения в ряд по малой амплитуде. Осуществляя это разложение после интегрирования находим выражение длины через амплитуду

$$D = 2\pi (Mq_0)^{-1/2} [1 + a q_0^{-2} (q_1^2 - 36 q_0 q_2 / 16)] + O(a^3).$$

и параметрическое задание свободной поверхности: для $-1 \leq R \leq 1$

$$\begin{aligned} \eta = 1 + aR/2, \quad x = \frac{D}{2} - (Mq_0)^{-1/2} & \left[\text{Arc cos } R - \frac{aq_1 \sqrt{1-R^2}}{2q_0} + \right. \\ & + a^2 \frac{q_1^2 - 36q_0q_2}{16q_0^2} \text{Arc cos } R + \\ & \left. + a^2 \frac{q_1^2 + 4q_0q_2}{16q_0^2} R \sqrt{1-R^2} + O(a^3) \right]. \end{aligned}$$

С ростом R функция x монотонно возрастает от значения $x = 0$ при $R = -1$ до значения $x = D$ при $R = 1$. Дли-

на волны D с ростом амплитуды растет или убывает в зависимости от знака выражения $q_1^2 - 36 q_0 q_2$.

Если h_0 мало, то $\kappa = (1 - \kappa_*) h_0$ мало и можно принять

$$q_1 = 1/12, \quad q_2 = 1/48, \quad q_0 = 1/2 - \kappa - \nu / M.$$

Неравенства (5.5) сводятся к следующим

$$T_0 > T_{10}, \quad 0 < \gamma < \gamma_1 = 3(5/16 - 3\kappa) \kappa_* / h_0, \quad (5.6)$$

$$T_0 < T_{10}, \quad 3(11/16 - \kappa) \kappa_* / h_0 = \gamma_2 \ll \gamma < 0. \quad (5.7)$$

Для системы "глицерин-воздух" при $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon_0 = 10^{-3} \cdot 980 \text{ см/с}^2$,

$|T_{10} - T_0| = 5$ град, $\varepsilon = 0,05$, $L = 5 \text{ см}$, $h_0 = 0,1$ имеем

$$|\gamma| = 5,7 \times 10^{-2}, \quad \gamma_1 = 0,85, \quad \gamma_2 = 1,8.$$

Условия (5.6), (5.7) можно считать выполненными.

Получим формулы для расчета уединенных волн. Если $q_+ = 0$, то полином $Y(r)$ имеет вид

$$Y(r) = 4^{-1} q_2 M a^4 (1-r)^2 (1+r) (r - r_+),$$

где $r_+ = q_1 / a q_2 - 1$. Он положителен при $r \in (-1, 1)$, если выполняются неравенства

$$M > 0, \quad r_+ < -1 \quad (5.8)$$

или

$$M < 0, \quad r_+ > 1 \quad (5.9)$$

При выполнении условий (5.3), (5.8), (5.9) уравнение (4.1) имеет малоамплитудное солитонное решение типа "яма". Из интеграла (4.4)

$$a \sqrt{|M| q_+} x = \int_{-1}^{R=2(\eta-1)} \frac{dr}{(1-r) \sqrt{(r+1)(r-r_+) \operatorname{sgn} M}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1-r_+)}} \ln \frac{\phi(1)+\phi(R)}{\phi(1)-\phi(R)}, \quad \phi(R) = \sqrt{(R-1)(R-r_+)}$$

находится поверхность солитона типа "яма"

$$\eta = 1 + \frac{a}{2} \frac{1-r_+ + 2r_+ \operatorname{th}^2 \theta_+ x}{r_+ - 1 + 2 \operatorname{th}^2 \theta_+ x}, \quad \theta_+ = a \sqrt{M q_2 \operatorname{sgn} M (1-r_+)/2} \quad (5.10)$$

Пусть $q_- = 0$. Подкоренной полином

$$Y(r) = 4^{-1} q_2 M a^4 (1+r)^2 (1-r) (r_- - r),$$

где $r_- = 1 + q_1 / a q_2$. Условия положительности определяются неравенством: $M > 0$, $r_- > 1$ или $M < 0$, $r_- < -1$. Решение представляет собой солитон типа "бугор". Для его нахождения интегрирование в (4.4) следует вести от $\tau = \eta$ до $\tau = k_2$. Вычисление интеграла дает

$$a \sqrt{|M| q_2} x = \int_{R=2(\eta-1)/a}^1 \frac{dr}{(1+r) \sqrt{\operatorname{Sgn} M (1-r)(r_- - r)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1+r_-)}} \ln \frac{\phi(-1)+\phi(R)}{\phi(-1)-\phi(R)}, \quad \phi(R) = \sqrt{(1-R)(r_- - R)}.$$

Отсюда для формы солитона типа "бугор" получаем уравнения

$$\eta = 1 + \frac{a}{2} \frac{1+r_- - 2r_- \operatorname{th}^2 \theta_- x}{1+r_- - 2 \operatorname{th}^2 \theta_- x}, \quad \theta_- = a \sqrt{q_2 |M| (1+r_-)/2} \quad (5.11)$$

Отметим, что форма солитонов (5.10), (5.11) зависит от трех параметров: a , n , M . Параметр B выражается через M из формул (5.3) или (5.4).

Если $n = 1/3$, то $q_1 = 0$. Поэтому выполняются равенства $q_+ = q_- = q_0 + 4a^2 q_2$; подставляя $q_0 = -4a^2 q_2$ в (5.1), получаем $Y(r) = Ma^4 q_2 (1-r^2)^2 / 4$. При $M > 0$ стационарное решение существует и имеет вид бора, у которого при $x \rightarrow -\infty$ значение η равно, например, $1 - a/2$ а при $x \rightarrow +\infty$ оно равно $1 + a/2$. Для нахождения формы бора интегрирование в (4.4) нужно вести от $\tau = 0$ до $\tau = \eta$. Переходя к переменной интегрирования r , вычисляем интеграл

$$a \sqrt{Mq_2} \int_0^{R=2(\eta-1)/a} \frac{dr}{1-r^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R}.$$

Отсюда находим форму бора

$$\eta = 1 + \frac{a}{2} \operatorname{th} \theta x, \quad \theta = 2a \sqrt{Mq_2} \quad (5.12)$$

Из условий существования решения (5.12) находим $h_0 = (1 - n_*)/3$,

$$\gamma = 81 n_* (1 - n_*) (1 + a^2/8) / 8 = \gamma_* \approx 0.9.$$

Для системы "глицерин-воздух" при $\varepsilon = 10^{-3} g_0$, $\varepsilon = 0.05$, $L = 5 \text{ см}$ имеем $h_0 \approx 0.3$, а значение $\gamma = \gamma_*$ достигается при перепаде температур $|T_{10} - T_0| \approx 0.33^\circ$.

Для построенных солитонных решений (5.10)-(5.12) граница слоя неподвижна. В слое происходит стационарное конвективное течение. При $x \rightarrow \infty$ производные η' , η'' равны нулю. Из уравнения (3.1) (при $n = \eta - 1$, $c = q = 0$) следует $\eta'''' = \eta'''' = 0$. Отсюда и из формул (1.5) находим $\lim_{x \rightarrow \infty} u = \lim_{x \rightarrow \infty} w$.

Следовательно, при $x \rightarrow \infty$ конвективное течение затухает.

6. Об аналогии с однослойной моделью. В рассматриваемом в данной работе длинноволновом приближении распределение температуры в системе "жидкость-газ" находится из решения следующих уравнений

$$\theta_{zz} = 0 \text{ при } 0 < z < h, \quad \theta_{1zz} = 0 \text{ при } h < z < 1 \quad (6.1)$$

с условиями

$$\theta_z = \kappa_* \theta_{1z}, \quad \theta = \theta_1 (= \theta_\Gamma) \text{ при } z = h, \quad (6.2)$$

$$\theta = \theta_0 \text{ при } z = 0, \quad \theta = \theta_{10} \text{ при } z=1 \quad (6.3)$$

Всуду выше предполагалось, что пластины изотермичны. Если θ_0 , θ_{10} заданные положительные функции переменных x , y , t , то из (6.1)-(6.3), находим

$$\theta = \kappa_* (\theta_{10} - \theta_0) z [1 - (1 - \kappa_*) h]^{-1} + \theta_0, \quad \theta_1 = (\theta_{10} - \theta_0) z [1 - (1 - \kappa_*) h^{-1}] + \theta_{10} \quad (6.4)$$

$$\nabla \theta_\Gamma = \kappa_* \nabla [(\theta_{10} - \theta_0) h / (1 - h + \kappa_* h) + \theta_0] \quad (6.5)$$

В этом случае конвекция в слое описывается уравнениями (I.1), (I.3), (I.5), (6.4), (6.5).

Можно показать, что для решения (6.4) выполняется равенство

$$\theta_z + \kappa_* (\theta - \theta_{10}) / (1 - h) = 0, \quad z = h(x, y, t), \quad (6.6)$$

выражающее пропорциональность теплового потока со свободной поверхности перепаду температур на свободной границе и верхней пластине. Равенство (6.6) может быть получено непосредственно из (6.4). Но на самом деле оно является следствием

только условий (6.2) и линейности функции θ_1 , а предположение о тонкости жидкого слоя оказывается несущественным.

Действительно, из линейности θ_1 и условий $\theta_1 = \theta_\Gamma$ при $z = h$, $\theta_1 = \hat{\theta}_{10}$ при $z = 1$ находится выражение θ_1 через θ_Γ : $\theta_1 = (\theta_{10} - \theta_\Gamma)(z - h) / (1 - h) + \theta_\Gamma$

Отсюда вычисляется производная θ_{1z} , подстановка которой в первое условие (6.2) дает формулу (6.6). В формуле (6.6) коэффициент теплоотдачи равен $\kappa_* (1 - h)^{-1}$. Он положителен и в каждой точке свободной поверхности имеет свое значение.

Поставим следующий вопрос. Можно ли для тепловой задачи (6.1)–(6.3) подобрать коэффициент $\beta = \text{const}$ и функцию

$\hat{\theta}_{10}(x, y, t)$ (не зависящую от $h(x, y, t)$) таким образом, чтобы на границе раздела выполнялось условие

$$\theta_z + \beta(\theta - \hat{\theta}_{10}) = 0 \quad \text{при} \quad z = h(x, y, t) \quad (6.7)$$

с постоянным "коэффициентом теплоотдачи" β и заданным "распределением температуры $\hat{\theta}_{10}$ в газе"? Нетрудно показать, что это можно сделать, если при помощи (6.4) найти выражения θ и θ_z при $z = h$, подставить их в (6.7) и заметить, что получающееся равенство тождественно выполняется при

$$\beta = \kappa_* - 1, \quad \hat{\theta}_{10} = \theta_0 + \kappa_*(\theta_{10} - \theta_0) / (\kappa_* - 1) \quad (6.8)$$

Из формул (6.8) следует $\text{sgn } \beta = \text{sgn } (\kappa_* - 1)$. Для реальных систем "жидкость-газ" отношение коэффициентов теплопроводности газа из жидкости $\kappa_* \approx 0.1$, т.е. всегда меньше единицы. Поэтому $\beta < 0$. Однако это обстоятельство не является каким-то парадоксом, поскольку на самом деле теплоотвод с границы раздела осуществляется в соответствии с формулой (6.6), а распределение температуры в газе определяется

не формулой (6.8), а формулой (6.4).

Отмеченная возможность сведения тепловых условий (6.2) для длинных волн к условию (6.7), (6.8) лежит в основе упомянутого ранее [3] факта о существовании аналогии между уравнениями (I.1), (I.3), (I.5), (6.4), (6.5) и уравнениями длинноволновой термокапиллярной конвекцией в жидком слое, на свободной границе которого для температуры выполняется условие третьего рода [4]. Параметр $\mu_* < 1$. Поэтому задача о конвекции в подогреваемом (соответственно охлажденном) со стороны подложки слое под крышкой оказывается формально эквивалентной задаче о конвекции в охлаждаемом (соответственно, подогреваемом) слое, на свободной границе которого выполняется "условие теплообмена с отрицательным числом Био".

Л и т е р а т у р а

1. Pimpitkar S.M., Ostrach S. Transient the rmoscapillary flow in thin liquid layers. Phys.Fluids, 1980, v. 23, N 7 .
2. Бадратинова Л.Г. Нелинейные уравнения длинных волн в задаче о термокапиллярной конвекции в двухслойной жидкости. - В сб.: Динамика сплошной среды", Новосибирск, вып.69, 1985.
3. Бадратинова Л.Г., Пухначев В.В. Некоторые математические модели термокапиллярного движения в тонком слое. - Теоретична и приложна механика. Пети конгресс, кн.2, София, 1985.
4. Копбосинов Б.К., Пухначев В.В. Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости. - В сб.: Гидромеханика и процессы переноса в невесомости, УНЦ АН СССР, Свердловск, 1983.